TRYGONOMETRIA, PLANIMETRIA, GEOMETRIA

Do modułu Trygonometria dołączamy działalność polegającą na wykonaniu prostych pomiarów geograficzno-astronomicznych, do których potrzebna jest prosta aplikacja lub lookup table na stronie WWW.

WSTĘP: zapomniana funkcja trygonometryczna

Tradycyjna szkolna lista funkcji trygonometrycznych obejmuje

- sinus
- cosinus
- tangens
- cotangens

Bardziej ambitni uczniowie (i nauczyciele) wprowadzają jeszcze secans i cosecans

- secans
- cosecans

Tymczasem w XIX wieku w powszechnym użytku były jeszcze inne funkcje trygonometryczne:

- sinus versus
- cosinus versus
- exsecans

Pełna menażeria funkcji to [oznaczyć autora po zalinkowaniu z wiki: upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7b/Circle-trig6_pl.svg

Ale najważniejszą z zaginionych funkcji trygonometrycznych była funkcja, zwana z angielskiego haversin, czyli *half of versin (sinus versus)*.

$$hav(\alpha) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$$

Stanowiła podstawę tablic haversinów potrzebnych do szybkiego wyznaczania odległości dla celów nawigacji morskiej. W czasach gdy nie było komputerów, a wszystkie obliczenia trzeba było wykonywać ręcznie, takie tablice znacząco pomagały w pracy nawigatora. Stosowano wtedy następującą formułę

$$h = hav(\phi_2 - \phi_1) + \cos(\phi_2)\cos(\phi_1)hav(\lambda_2 - \lambda_1)$$

gdzie ϕ_1, ϕ_2 to szerokości geograficzne,
a λ_1, λ_2 to długości geograficzne

Mając tablicę funkcji odwrotnych do *hav*, można było obliczyć szybko odległość sferyczną pomiędzy dwoma punktami, których współrzędne geograficzne się znało.

$$d = r hav^{-1}(h)$$

lub ewentualnie

$$d = 2r\arcsin^{-1}(\sqrt{h})$$

Liderem projektu „Cyfrowa Akademia" jest ***Centrum Edukacji Obywatelskiej****. Projekt prowadzony jest w partnerstwie z* ***Wojskową Akademią Techniczną w Warszawie, Szkołą Główną Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie*** *oraz firmą* ***NebulaX.*** Projekt finansowany jest przez **Narodowe Centrum Badań i Rozwoju** w ramach programu Innowacje społeczne.

Zauważmy, że *d* jest odległością po liczoną po powierzchni Ziemi, przy założeniu, że Ziemia jest kulą. To oczywiście wprowadza pewien błąd, ale dla naszych celów dokładność wzoru hawersinów wystarczy.

ZADANIE: wyznaczanie odległości sferycznej

Przygotowanie

Do wykonania obliczeń potrzebne będzie wyznaczenie długości i szerokości geograficznej dwóch punktów na Ziemi. Dane te można odczytać z mapy (w wersji papierowej) lub za pomocą narzędzi dostępnych w internecie (należy jedynie pamiętać, aby dane były w formacie stopień-minuta-sekunda).

Obliczenia online

Logujemy się na stronie kursu i otwieramy zakładkę z tablicą haversinów. Typowa tablica haversinów pozwala na proste sprawdzenie jednocześnie cosinusów i haversinów zadanego kąta. Takie ułożenie danych znacząco ułatwia obliczenia.

Załóżmy na przykład, że zmierzona szerokości geograficzne punktów to 53o 12' 16'' oraz 52o 05' 01''. Różnica między nimi wynosi 01o 07' 15''.

W tablicy odszukujemy wiersz

				cos	hav
				cos	hav
52	05	01	????	????	
...	...	...	...		...
53	12	16	????	????	

zapisujemy od razu cosinusy szerokości, a następnie przechodzimy do wiersza

01	0t	15	????	????

skąd odczytujemy haversin.

Wykonujemy odpowiednie mnożenia i odejmowania.

Teraz przechodzimy do zakładki z odwrotnym haversinem. W tablicy odszukujemy uzyskaną przed chwilą wartość i odczytujemy odwrotność. Pomnożona przez wartość promienia Ziemi w kilometrach da nam ona wynik w postaci odległości, jaką musimy przebyć pomiędzy dwoma punktami po powierzchni Ziemi.

Interpretacja wyników

Oczywiście wyniki są obarczone sporym błędem.

Po pierwsze – odczyt szerokości i długości geograficznej może być błędny lub niedokładny. Korzystanie ze wskazań GPS daje dokładność do kilkunastu metrów.

Po drugie – formuła stosowana do obliczeń w tablicach ma skończoną dokładność. Wyniki zaokrąglone są do konkretnego miejsca po przecinku.

Po trzecie (i najważniejsze) – wzór haversinów ma zasadniczą wadę, bowiem zakłada, że Ziemia jest sferą. W praktyce promień Ziemi jest różny dla różnych szerokości i długości geograficznych. Tak naprawdę Ziemia jest nieregularną geoidą, dlatego promień nie jest stały nawet na określonej szerokości geograficznej!

*Liderem projektu „**Cyfrowa Akademia**" jest **Centrum Edukacji Obywatelskiej**. Projekt prowadzony jest w partnerstwie z **Wojskową Akademią Techniczną w Warszawie**, **Szkołą Główną Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie** oraz firmą **NebulaX**.* Projekt finansowany jest przez **Narodowe Centrum Badań i Rozwoju** w ramach programu Innowacje społeczne.

Można spróbować poprawić oszacowanie wyliczając średnią z danych szerokości geograficznych. Zakładając, że Ziemia jest bryłą obrotową, można przyjąć stały promień dla danej średniej szerokości. Jeśli różnica szerokości geograficznych nie jest duża, to oszacowanie powinno być dokładniejsze.

Istnieje stosunkowo skuteczna metoda matematyczna przekształcenia wyników wzoru haversinów ze sfery na elipsoidę obrotową, której kształt znacznie lepiej przybliża rzeczywisty kształt Ziemi, jednak zagadnienie to wykracza poza ramy niniejszego kursu.

Autor: Łukasz Badowski

*Liderem projektu „**Cyfrowa Akademia**" jest **Centrum Edukacji Obywatelskiej**. Projekt prowadzony jest w partnerstwie z **Wojskową Akademią Techniczną w Warszawie**, **Szkołą Główną Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie** oraz firmą **NebulaX**.* Projekt finansowany jest przez **Narodowe Centrum Badań i Rozwoju** w ramach programu Innowacje społeczne.